2 Générations imbriquées altruistes

2.1 Les conditions d'optimalité d'allocation intertemporelle

quand il est jeune : $c_t^j + s_t = w_t + x_t$ (1)

quand il est vieux : $c_{t+1}^v + (1+n).x_{t+1} = \left(1+r_{t+1}\right).s_t$ avec $x_{t+1} \geq 0$ (2)

Sa fonction d'utilité est : $V_t = u(c_t^j) + \dfrac{u(c_{t+1}^v)}{1+\rho} + \dfrac{(1+n)}{(1+\phi)}.V_{t+1}$

Soit $V_t = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\dfrac{(1+n)}{(1+\phi)}\right)^i \left[u(c_{t+i}^j) + \dfrac{u(c_{t+1+i}^v)}{1+\rho}\right]$ avec $\boxed{\phi > n}$ (3)

Puisque $\dfrac{(1+n)}{(1+\phi)}$<1 pour que la somme converge vers une valeur finie.

En résumé, le problème de l'agent est donc en t :

$$\max_{c_t^j,\, c_{t+1}^v,\, x_{t+1}} V_t = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{(1+n)}{(1+\phi)}\right)^i \left[u(c_{t+i}^j) + \frac{u(c_{t+1+i}^v)}{1+\rho}\right]$$

$$ss : \quad c_t^j + s_t = w_t + x_t \quad , \quad c_{t+1}^v + (1+n).x_{t+1} = \left(1+r_{t+1}\right).s_t \ , \quad x_{t+1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \ \max_{c_t^j,\, c_{t+1}^v,\, x_{t+1}} V_t = u(c_t^j) + \frac{u(c_{t+1}^v)}{1+\rho} + \frac{(1+n)}{(1+\phi)}.u(c_{t+1}^j) + ... \quad \text{ss : …}$$

$$\Leftrightarrow \ \max_{s_t,\, x_{t+1}} V_t = u(w_t + x_t - s_t) + \frac{u\left[(1+r_{t+1}).s_t - (1+n)x_{t+1}\right]}{1+\rho} + \frac{(1+n)}{(1+\phi)}.u(w_{t+1} + x_{t+1} - s_{t+1}) + ...$$

$\dfrac{\partial V_t}{\partial s_t} = -\dfrac{\partial u(c_t^j)}{\partial c_t^j} + \dfrac{(1+r_{t+1})}{(1+\rho)} \dfrac{\partial u(c_{t+1}^v)}{\partial c_{t+1}^v} = 0$ puisque $s_t > 0$ (4)

$\dfrac{\partial V_t}{\partial x_{t+1}} = -\dfrac{(1+n)}{(1+\rho)} \dfrac{\partial u(c_{t+1}^v)}{\partial c_{t+1}^v} + \dfrac{(1+n)}{(1+\phi)} \dfrac{\partial u(c_{t+1}^j)}{\partial c_{t+1}^j} = 0$ si $x_{t+1} > 0$ (5a)

$\dfrac{\partial V_t}{\partial x_{t+1}} = -\dfrac{(1+n)}{(1+\rho)} \dfrac{\partial u(c_{t+1}^v)}{\partial c_{t+1}^v} + \dfrac{(1+n)}{(1+\phi)} \dfrac{\partial u(c_{t+1}^j)}{\partial c_{t+1}^j} \leq 0$ si $x_{t+1} = 0$ (5b)

(4) $\Rightarrow \dfrac{u'(c_t^j)}{u'(c_{t+1}^v)} = \dfrac{1+r_{t+1}}{1+\rho}$ (6)

(5a) $\Rightarrow \dfrac{u'(c_{t+1}^j)}{u'(c_{t+1}^v)} = \dfrac{1+\phi}{(1+\rho)}$ (5b) $\Rightarrow \dfrac{u'(c_{t+1}^j)}{u'(c_{t+1}^v)} < \dfrac{1+\phi}{(1+\rho)}$ (7)

$\dfrac{(4)}{(5a)} \Rightarrow \dfrac{u'(c_t^j)}{u'(c_{t+1}^j)} = \dfrac{1+r_{t+1}}{(1+\phi)}$ $\dfrac{(4)}{(5b)} \Rightarrow \dfrac{u'(c_t^j)}{u'(c_{t+1}^j)} > \dfrac{1+r_{t+1}}{(1+\phi)}$ (8)

Puisque ces propriétés sont vraies $\forall$t on a : $\dfrac{u'(c_{t+1}^j)}{u'(c_{t+1}^v)} = \dfrac{u'(c_t^j)}{u'(c_t^v)}$ et $\dfrac{u'(c_t^j)}{u'(c_{t+1}^j)} = \dfrac{u'(c_t^v)}{u'(c_{t+1}^v)}$.

Conditions	*u =ln(c)*	$u=\dfrac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}$
6	$\dfrac{c_{t+1}^{v}}{c_t^{j}}=\dfrac{1+r_{t+1}}{1+\rho}$	$\dfrac{c_{t+1}^{v}}{c_t^{j}}=\left(\dfrac{1+r_{t+1}}{1+\rho}\right)^{1/\sigma}$
7 Vrai en t et t+1	$\dfrac{c_t^{v}}{c_t^{j}}=\dfrac{1+\phi}{1+\rho}$	$\dfrac{c_t^{v}}{c_t^{j}}=\left(\dfrac{1+\phi}{1+\rho}\right)^{1/\sigma}$
8 Vrai pour les jeunes et vieux	$\dfrac{c_{t+1}}{c_t}=\dfrac{1+r_{t+1}}{1+\phi}$	$\dfrac{c_{t+1}}{c_t}=\left(\dfrac{1+r_{t+1}}{1+\phi}\right)^{1/\sigma}$

2.2 État régulier

Supposons la fonction d'utilité *u=ln(c)* et la fonction de production $f(k_t)=k^{\alpha}$.
A l'équilibre concurrentiel on a, comme précédemment, les conditions du premier ordre des producteurs $w_t=(1-\alpha).k_t^{\alpha}$ $r_t+\delta=\alpha.k_t^{\alpha-1}$ et la condition d'équilibre (inchangée en présence d'altruisme) : $(1+n)k_{t+1}=s_t$.
A l'état régulier $c_{t+1}=c_t$, dans l'équation (8) cela implique $r^*=\phi$ (9)

Comme $r^*=\alpha k^{\alpha-1}-\delta=\phi$ en résolvant en k : $k^*=\left(\dfrac{\alpha}{\phi+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ et $w^*=(1-\alpha)k^{*\alpha}$

De (1) : $c^j+s=w+x$
De (2) : $c^v=(1+r)s-(1+n)x$
De (6) : $c^v=\dfrac{(1+r)}{(1+\rho)}c^j$

En égalisant ces deux dernières équations : $c^j=(1+\rho)s-\dfrac{(1+n)(1+\rho)}{(1+r)}x$

En portant cette valeur de c^j dans (1), en remplaçant (r) par (ϕ), et en résolvant en s :

$$s^*=\frac{1}{2+\rho}\left[w^*+x+x\frac{(1+\rho)(1+n)}{(1+\phi)}\right] \qquad (10)$$

En remplaçant s par à $(1+n)k=s$ et en résolvant en x, on obtient l'héritage :

$$x^*=\frac{(2+\rho)(1+\phi)}{(1+\phi)+(1+n)(1+\rho)}\left[(1+n)k^*-\frac{1}{2+\rho}w^*\right] \qquad (11)$$

En remplaçant k* et w* par leurs valeurs on exprime l'héritage d'état régulier en fonction de paramètres.

$$x^*=\frac{(2+\rho)(1+\phi)}{(1+\phi)+(1+n)(1+\rho)}\left[(1+n)\left(\frac{\alpha}{\phi+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}-\frac{1}{2+\rho}(1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{\phi+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right]$$

L'héritage est positif si : $\phi+\delta<\dfrac{\alpha}{(1-\alpha)}(2+\rho)(1+n)=\overline{\phi} \Leftrightarrow \phi=r^*<r^{égoiste}$

Une autre façon de prouver cela est d'examiner l'équation (11). On voit que l'héritage d'état régulier est positif si :

$$\frac{k^*}{w^*}=\frac{k}{(1-\alpha)k^{\alpha}}>\frac{1}{(1+n)(2+\rho)} \quad \Leftrightarrow \quad k^*>\left[\frac{(1-\alpha)}{(1+n)(2+\rho)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

2.3 L'impôt sur l'héritage

L'équation (5) devient $\frac{\partial V_t}{\partial x_{t+1}}=-\frac{(1+n)}{(1+\rho)}\frac{\partial u(c^v_{t+1})}{\partial c^v_{t+1}}+\frac{(1+n)(1-\tau)}{(1+\phi)}\frac{\partial u(c^j_{t+1})}{\partial c^j_{t+1}}=0$

L'équations (7) devient : $\frac{c^v_t}{c^j_t}=\frac{(1+\phi)}{(1+\rho)(1-\tau)}$

L'équations (8) devient : $\frac{c_{t+1}}{c_t}=\left(\frac{(1+r_{t+1})(1-\tau)}{(1+\phi)}\right)$

L'équation (9) devient $r^*=\frac{\phi+\tau}{1-\tau}$ le taux d'intérêt est plus élevé ($\frac{1}{1-\tau}>1$)

Le capital devient $k^*=\left(\frac{\alpha(1-\tau)}{\phi+\delta+\tau(1-\delta)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

2.4 Possibilité d'inefficience dynamique

État régulier avec legs positifs : les conditions (4 et 5a) nous donnent la règle de Ramsey à l'état régulier :

$$c_t=c_{t+1} \Rightarrow 1=\frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})}=\frac{1+r}{1+\phi} \Rightarrow \quad r^*=\phi \tag{9}$$

Le taux d'intérêt est égal au taux d'égoïsme.

État régulier avec legs nuls : les conditions (4 et 5b) impliquent à l'état régulier:

$$c_t=c_{t+1} \Rightarrow 1=\frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})}>\frac{1+r}{1+\phi} \Rightarrow \quad r^*\le\phi \tag{10}$$

Si les legs sont positifs ($x_{t+1}>0$), puisque la condition d'existence impose $\phi>n$, il est clair que l'on a : $r^*=\phi>n$ et **l'économie est dynamiquement efficiente**.

Si les legs sont nuls $x_{t+1}=0$**,** la condition d'existence ne nous garantit rien du tout puisque on a alors : $r^*\le\phi>n$. Il se peut que $r^*>n$ qu'on soit en efficience mais il se peut que $r^*<n$ qu'on soit en inefficience.

Encadré 6 : Exercice

La fonction de production est $Y=K^{\alpha}L^{(1-\alpha)}$, la population croit au taux n, le taux de dépréciation du capital est δ . Le taux d'épargne du modèle de Solow est ζ , la fonction d'utilité du modèle de Ramsey et du modèle GI est $U=\ln c$.
Déterminez k* dans les quatre modèles : Solow, Ramsey, GI égoïste, GI altruiste.

****

La fonction de production $Y = K^{\alpha}(e^{nt}L_0)^{(1-\alpha)}$ Divisons par $e^{nt}L_0$, on obtient: $\boxed{y = k^{\alpha}}$ dont on tire, à l'équilibre concurrentiel : $R = r + \delta = f'(k) = \alpha k^{(\alpha-1)}$ et $w = (1-\alpha)k^{\alpha}$.

Le modèle de Solow: La condition d'équilibre I=S est $Dk = \zeta k^{\alpha} - (n+\delta)k$ où ζ est donné.

A l'état régulier, $\boxed{Dk = 0}$, et donc : $k^* = \left[\dfrac{\zeta}{n+\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$ dont on tire y et c.

Le modèle de Ramsey ; La condition d'équilibre est $Dk = f(k) - c - [n+\delta].k$

Du problème du consommateur Max $_{c(t)}$ $U = \int_0^{+\infty} e^{-\rho.t}e^{n.t}\ln c(t).dt$ sous $w + ra = c + na + Da$ où a=k, on tire la règle de Ramsey-Keynes $\dfrac{Dc}{c} = r - \rho$

A l'état régulier, $Dk = 0$, et $Dc = 0$ Comme $\boxed{Dc = 0}$ on a : $f'(k^*) - \delta = \rho$ ou $\alpha k^{\alpha-1} = \delta + \rho$ et on résout en k : $k^* = \left(\dfrac{\alpha}{\delta+\rho}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ dont on tire y et celle de c de $Dk = 0$.

Le modèle GI égoïste : La condition d'équilibre I=S devient $(1+n)k_{t+1} = s_t$

Du problème Max $V_t = \ln c_t^j + \dfrac{\ln c_{t+1}^v}{1+\rho}$ sous $c_t^j + s_t = w_t$ et $c_{t+1}^v = (1 + r_{t+1}).s_t$ on tire la valeur de l'épargne $s_t = \dfrac{w_t}{2+\rho}$. En remplaçant dans la condition d'équilibre : $k_{t+1} = \dfrac{(1-\alpha)k_t^{\alpha}}{(1+n).(2+\rho)}$

A l'ER $\boxed{\Delta k = 0}$ donc : $k^* = \left[\dfrac{(1-\alpha)}{(1+n).(2+\rho)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$ dont on tire y et c.

Le modèle GI altruiste : La condition d'équilibre est $(1+n)k_{t+1} = s_t$. Du problème : Max

$$V_t = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{(1+n)}{(1+\phi)}\right)^i\left[u(c_{t+i}^j) + \frac{u(c_{t+1+i}^v)}{1+\rho}\right] \text{sous } c_t^j + s_t = w_t + x_t \quad , \; c_{t+1}^v + (1+n).x_{t+1} = (1 + r_{t+1}).s_t$$

on tire $\dfrac{c_{t+1}}{c_t} = \dfrac{1+r}{1+\phi}$. A l'état régulier, $\Delta k = 0$, et $\Delta c = 0$. Comme $\boxed{\Delta c = 0}$ on a $r = \phi \Leftrightarrow f'(k^*) - \delta = \phi$. Donc $\alpha k^{\alpha-1} = \delta + \phi$ on résout en k : $k^* = \left(\dfrac{\alpha}{\delta+\phi}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ dont on a y et c.